Función de dos variables y sucesiones numéricas eventualmente periódicas.

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2021

Resumen

Presento un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles y empezadas con cualquier número entero.

Palabras clave: *Secuencias eventualmente periódicas, conjetura de Collatz.*

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m.

Sean (k, m) ∈ ℤ , se define este algoritmo como la función f(k,m), tal que:

$$f(k,m) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si k y m son de la misma paridad.} \\ (3k+1+m)/2, & \text{si k y m son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Dom f(k,m) = (k+m) > 0.

Para ∀ (k, m) ∈ ℤ , en un número finito de iteraciones, k(n)=1-m.

Propiedades

1 – *Todas las sucesiones generadas serán eventualmente periódicas, de período 2, p1=2-m, p2=1-m.*

2 - *Las secuencias con el mismo valor de k+m, tendrán igual número de elementos y la misma distancia entre ellos, que será igual a la distancia entre los valores de m.*

$$k(n)-k1(n)=m-m1 \iff k+m=k1+m1$$

Ejemplos:	*k(37)+m(28) = 65*	*37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.*
	k(243)+m(-178) =65	*243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.*
	k(65)+m(0) =65	*65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.*

Las tres secuencias tienen 20 elementos.

3 – *En todas las secuencias, la diferencia entre el primer elemento k y el último k(n), es igual a k+m-1.*

$$k-k(n)=k+m-1$$

Matrices M(n)

Con los valores de k y de m, formamos una matriz con dos filas e infinitas columnas.
En la primera fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la derecha del cero, que representan los posibles valores de k.
En la segunda fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la izquierda del cero, que representan los valores de m.

Una parte de la matriz con los valores desde -5 hasta 7 para k y desde 6 hasta -6 para m:

$$\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz M(1), en la que k+m=1 en cada columna.

Una parte de la matriz con los valores desde 10 hasta 22 para k y desde 6 hasta -6 para m:

$$\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \begin{pmatrix} \dots & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz M(16), porque en cada columna k+m=16.

Los elementos de las dos matrices son los mismos, pero en la matriz M(16) se ha desplazado la primera fila hasta coincidir k(16) con m(0), para visualizar que en todas las columnas k+m=16.

Conjuntos C(n)

Todas las secuencias generadas con los valores de k y de m de cada columna de la matriz M(n)
tienen el mismo número de elementos y hay la misma distancia entre ellos.
Al conjunto de estas secuencias lo llamamos C(n), donde n=k+m.

Ejemplo:

Con los valores de las columnas de la matriz M(16), la función generará infinitas secuencias que formarán el conjunto C(16).

$$
C(16)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\ldots \\
(10,\quad 2,\quad -2,\quad -4,\quad -5); \\
(11,\quad 3,\quad -1,\quad -3,\quad -4); \\
(12,\quad 4,\quad 0,\quad -2,\quad -3); \\
(13,\quad 5,\quad 1,\quad -1\quad -2); \\
(14,\quad 6,\quad 2,\quad 0,\quad -1); \\
(15,\quad 7,\quad 3,\quad 1,\quad 0); \\
(16,\quad 8,\quad 4,\quad 2,\quad 1); \\
(17,\quad 9,\quad 5,\quad 3,\quad 2); \\
(18,\quad 10,\quad 6,\quad 4,\quad 3); \\
(19,\quad 11,\quad 7,\quad 5,\quad 4); \\
(20,\quad 12,\quad 8,\quad 6,\quad 5); \\
(21,\quad 13,\quad 9,\quad 7,\quad 6); \\
(22,\quad 14,\quad 10,\quad 8,\quad 7); \\
\ldots
\end{array}
\right\}
$$

Existen infinitos resultados para k+m, que formarán infinitos conjuntos C(n), con las mismas propiedades.

Ejemplos

Si queremos formar una secuencia que termine en 45, asignaremos a m el valor de -44 y aplicaremos la siguiente función, de forma iterada, hasta llegar a k(n)=1- m:

$$
f(k,m) = \begin{cases} (k+44)/2, & \text{si k y m son de la misma paridad.} \\ (3k-43)/2, & \text{si k y m son de distinta paridad.} \end{cases}
$$

Porque el dominio de esta función es (k+m) > 0 → k ≥ 45.

Secuencia empezada con k=74, m=-44:

74, 59, 67, 79, 97, 124, 84, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, . . .

Secuencia empezada con k=12795, m=-44:

12795, 19171, 28735, 43081, 64600, 32322, 16183, 24253, 36358, 18201, 27280, 13662, 6853, 10258, 5151, 7705, 11536, 5790, 2917, 4354, 2199, 3277, 4894, 2469, 3682, 1863, 2773, 4138, 2091, 3115, 4651, 6955, 10411, 15595, 23371, 35035, 52531, 78775, 118141, 177190, 88617, 132904, 66474, 33259, 49867, 74779, 112147, 168199, 252277, 378394, 189219, 283807, 425689, 638512, 319278, 159661, 239470, 119757, 179614, 89829, 134722, 67383, 101053, 151558, 75801, 113680, 56862, 28453, 42658, 21351, 32005, 47986, 24015, 36001, 53980, 27012, 13528, 6786, 3415, 5101, 7630, 3837, 5734, 2889, 4312, 2178, 1111, 1645, 2446, 1245, 1846, 945, 1396, 720, 382, 213, 298, 171, 235, 331, 475, 691, 1015, 1501, 2230, 1137, 1684, 864, 454, 249, 352, 198, 121, 160, 102, 73, 88, 66, 55, 61, 70, 57, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, . . .

Para todo entero k ≥ 45, la iteración bajo esta transformación, terminará en 46, 45.

Si queremos que la secuencia acabe en el número k(n)=-100, asignaremos a m el valor de 101 y la iteración bajo esta transformación, para todo número entero k ≥ -100, terminará en -99, -100.

$$f(k,m) = \begin{cases} (k-101)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+102)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es (k+m) > 0 → k ≥ -100.

Secuencia empezada con k=21, m=101:

21, -40, -9, -55, -78, -66, -48, -21, -61, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Secuencia empezada con k=0, m=101:

0, 51, -25, -63, -82, -72, -57, -79, -90, -84, -75, -88, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Conclusión

Cualquier número entero k ∈ ℤ del dominio, sometido a la transformación de la función de manera iterada, acabará siempre en k(n) = 1-m.

Con esta función podemos determinar el número entero al que llegará cada secuencia, después de un número finito de iteraciones, en función del valor que asignemos a m ∈ ℤ, del dominio.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de k, porque en todos los conjuntos C(n) existe una secuencia generada con el valor de m=0 que acabará en k(n)=1-m, o sea 1.

Calculador online de la función, generador de sucesiones: www.riodena.es

Definiciones

k ∈ ℤ es el primer elemento que empieza la secuencia.
k(n) ∈ ℤ es el último elemento al que converge la secuencia.
m ∈ ℤ es la variable que nos permite elegir el valor de k(n).

k(n) = 1-m

k-k(n) = k+m-1

Dominio = (k+m) ≥ 1

Para k<0, m≥|k|+1

Para m<0, k≥|m|+1

Ejemplo:

si m=-33, k(n)=34----> 75, 54, 65, 49, 41, 37, 35, 34, 35, 34, . . .

k-k(n) = k+m-1 = 75+(-33)-1=41

En la siguiente matriz, los valores de k son los mínimos que pueden ser para formar una secuencia con el valor de m de su columna. También son los valores de k(n), el último elemento al que convergen las secuencias generadas con el valor de m de su columna.

k, k(n) . . . -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 . . .

m . . . . . . 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 . . .

Si queremos generar sucesiones que terminen en k(n)=2, tenemos que decir que m=-1, porque k(n)=1-m y hacer los cálculos de la función:

$$f(k,m) = \begin{cases} (k+1)/2, & \text{si k y m son de la misma paridad.} \\ (3k)/2, & \text{si k y m son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Dominio f(k,m)=(k+m)>0

Todas las secuencias generadas con esta función, empezadas con k≥2, acabarán en 2. El período sera p=2, p1=3, p2=2.

Ejemplo k(93), m(-1):

93, 47, 24, 36, 54, 81, 41, 21, 11, 6, 9, 5, 3, 2, 3, 2, . . .

Todas estas sucesiones tienen 10 elementos y la diferencia entre ellos es la misma:

k(53), m(0) *53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.*

k(33), m(20) *33, 60, 20, 0, -10, -15, -12, -16, -18, -19.*

k(0), m(53) *0, 27, -13, -33, -43, -48, -45, -49, -51, -52.*

k(79), m(-26) *79, 106, 66, 46, 36, 31, 34, 30, 28, 27.*

k(-247), m(300) *-247, -220, -260, -280, -290, -295, -292, -296, -298, -299.*

k(-1982), m(2035) *-1982, -1955, -1995, -2015, -2025, -2030, -2027, -2031, -2033, -2034.*

La función generará infinitas sucesiones con estas características, si en todas, (k+m) ∈ ℤ, es igual.

k(53), m(0) *53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.*

k(0), m(53) *0, 27, -13, -33, -43, -48, -45, -49, -51, -52.*

La diferencia de m de las dos secuencias es la misma que de los elementos de las secuencias, que ocupan el mismo lugar.

k(0), m(53), Cálculos:

*(0 * 3 + 54) / 2 = 27*
(27 - 53) / 2 = -13
(-13 - 53) / 2 = -33
(-33 - 53) / 2 = -43
(-43 - 53) / 2 = -48
*(-48 * 3 + 54) / 2 = -45*
(-45 - 53) / 2 = -49
(-49 - 53) / 2 = -51
(-51 - 53) / 2 = -52

Otros ejemplos:

Si k=641 y m=9:

641, 316, 479, 235, 113, 52, 83, 37, 14, 26, 44, 71, 31, 11, 1, -4, -1, -5, -7, -8.

Sumando m a cada elemento, resultan los elementos de la secuencia de Collatz, empezada con el número 650:

650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Si k=330 y m=-5:

330, 493, 249, 127, 66, 97, 51, 28, 40, 58, 85, 45, 25, 15, 10, 13, 9, 7, 6.

Sumando m a cada elemento, resultan los elementos de la secuencia de Collatz, empezada con el número 325:

325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Diferencia entre las fórmulas del algoritmo de la conjetura de Collatz y las del algoritmo de Dosena:

Dosena		*Collatz*	
Si es par:	*(3n+m+1)/2*	*Si es par:*	*n/2*
Si es impar:	*(n-m)/2*	*Si es impar:*	*(3n+1)/2*

Dosena - Collatz, números pares:

(3n+m+1)/2-n/2=n+1 ==> (3n+m+1)/2-n/2-n-1=0 ==> m/2-1/2=0 ==> m=1
(3n+m+1)/2-n/2=n+2 ==> (3n+m+1)/2-n/2-n-2=0 ==> m/2-3/2=0 ==> m=3
(3n+m+1)/2-n/2=n+3 ==> (3n+m+1)/2-n/2-n-3=0 ==> m/2-5/2=0 ==> m=5
(3n+m+1)/2-n/2=n+4 ==> (3n+m+1)/2-n/2-n-4=0 ==> m/2-7/2=0 ==> m=7
(3n+m+1)/2-n/2=n+5 ==> (3n+m+1)/2-n/2-n-5=0 ==> m/2-9/2=0 ==> m=9
. . . .
Collatz - Dosena, números impares:

(3n+1)/2-(n-m)/2=n+1 ==> (3n+1)/2-(n-m)/2-n-1=0 ==> m/2-1/2=0 ==> m=1
(3n+1)/2-(n-m)/2=n+2 ==> (3n+1)/2-(n-m)/2-n-2=0 ==> m/2-3/2=0 ==> m=3
(3n+1)/2-(n-m)/2=n+3 ==> (3n+1)/2-(n-m)/2-n-3=0 ==> m/2-5/2=0 ==> m=5
(3n+1)/2-(n-m)/2=n+4 ==> (3n+1)/2-(n-m)/2-n-4=0 ==> m/2-7/2=0 ==> m=7
(3n+1)/2-(n-m)/2=n+5 ==> (3n+1)/2-(n-m)/2-n-5=0 ==> m/2-9/2=0 ==> m=9
. . . .

Las diferencias de los números pares y las de los números impares, son equivalentes.

(3n+m+1)/2-n/2 = (3n+1)/2-(n-m)/2 = n+1
. . . .

Cualquier secuencia de Collatz {Cn} empezada con Kn, llegará al número 1, porque cualquier secuencia {Sn} empezada con Kn-m, llegará al número 1-m. El valor de m es cualquier número impar, positivo o negativo.

m	pares	impares
-5	(3k-4)/2	(k+5)/2
-4	(3k-3)/2	(k+4)/2
-3	(3k-2)/2	(k+3)/2
-2	(3k-1)/2	(k+2)/2
-1	3k/2	(k+1)/2
0	(3k+1)/2	(k-0)/2
1	(3k+2)/2	(k-1)/2
2	(3k+3)/2	(k-2)/2
3	(3k+4)/2	(k-3)/2
4	(3k+5)/2	(k-4)/2
5	(3k+6)/2	(k-5)/2

Si m es par, la función de los números pares se aplica a los números impares y la función de los números impares se aplica a los números pares:

Ejemplo m=4: *Si k es par:* $(k-4)/2$
Si k es impar: $(3k+5)/2$

Función general:

Escoger los valores de k y de m y aplicar la operación que corresponda.

$m \in \mathbb{Z}$
$k \in \mathbb{N}$.

$$f(k) = \begin{cases} m \text{ par} & \begin{cases} k \text{ par} & (k-m)/2 \\ k \text{ impar} & (3k+1+m)/2 \end{cases} \\ m \text{ impar} & \begin{cases} k \text{ par} & (3k+1+m)/2 \\ k \text{ impar} & (k-m)/2 \end{cases} \end{cases}$$

Cada resultado obtenido es el valor de k para la siguiente iteración.

Para todo k se genera una sucesión que llega a kn = 1-m y acaba en un ciclo con k(n-1) = 2-m.

Las secuencias generadas por la conjetura de Collatz son solamente una de las infinitas opciones de la función general cuando m=0 y hay infinitas opciones, porque m ∈ ℤ.

Otras sucesiones con el mismo número de elementos y con la diferencia de m en su valor:

m=0, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

m=1, 865, 432, 649, 324, 487, 243, 121, 60, 91, 45, 22, 34, 52, 79, 39, 19, 9, 4, 7, 3, 1, 0.

m=2, 864, 431, 648, 323, 486, 242, 120, 59, 90, 44, 21, 33, 51, 78, 38, 18, 8, 3, 6, 2, 0, -1.

m=3, 863, 430, 647, 322, 485, 241, 119, 58, 89, 43, 20, 32, 50, 77, 37, 17, 7, 2, 5, 1, -1, -2.

m=4, 862, 429, 646, 321, 484, 240, 118, 57, 88, 42, 19, 31, 49, 76, 36, 16, 6, 1, 4, 0, -2, -3.

m=5, 861, 428, 645, 320, 483, 239, 117, 56, 87, 41, 18, 30, 48, 75, 35, 15, 5, 0, 3, -1, -3, -4.

m=6, 860, 427, 644, 319, 482, 238, 116, 55, 86, 40, 17, 29, 47, 74, 34, 14, 4, -1, 2, -2, -4, -5.

. . .